

音阶中的数学之美

广州体育东路小学兴国学校 六年（5）班 何祖安

我从小就对音乐着迷，喜欢抚摸钢琴上那黑白琴键，同时也十分热爱数学和逻辑推理。我常思考，为什么贝多芬失聪后还能谱出那么多伟大的乐章，为什么钢琴每个键都能弹出那么标准悦耳的音乐。

一、 提出问题

音阶之间究竟有什么规律关系呢？古代的宫商角徵羽分别是什么音阶，高低关系如何？

二、 资料搜集

1) 国内资料

春秋战国时期的《管子》一书有如下记载：“凡将起五音，凡首，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄钟小素之首以成宫，三分而益之以一，为百有八，为徵，不无有，三分而去其乘，适足以是生商。有三分而复于其所，以是成羽，有三分去其乘，适足以是成角。”这就是“三分损益法”。

2) 外国资料

古希腊的大数学家毕达哥拉斯认为“万物皆数”，“弦的发声中有几何原理，宇宙空间中包含着音乐”。毕达哥拉斯采用 3:2 作为生律元素，提出了“五度相生律”。假定音阶 C 对应的频率为 f ，那么其上方五度的 G 对应的频率应为 $(3/2)f$ 。G 上方五度音的频率应该是 $(9/4)f > 2f$ ，超出了同一个八度，因此将其降低一个八度，得到音级 D 对应的频率为 $(9/8)f$ 。然后继续按照上面的做法，每次用 $3/2$ 去乘；如果得到的数大于 2，超出了同一个八度，就再多乘一个 $1/2$ 。

三、 计算推理

根据《管子》的记载，我用所学的比例和古文知识，根据《管子》的记载计算如下：

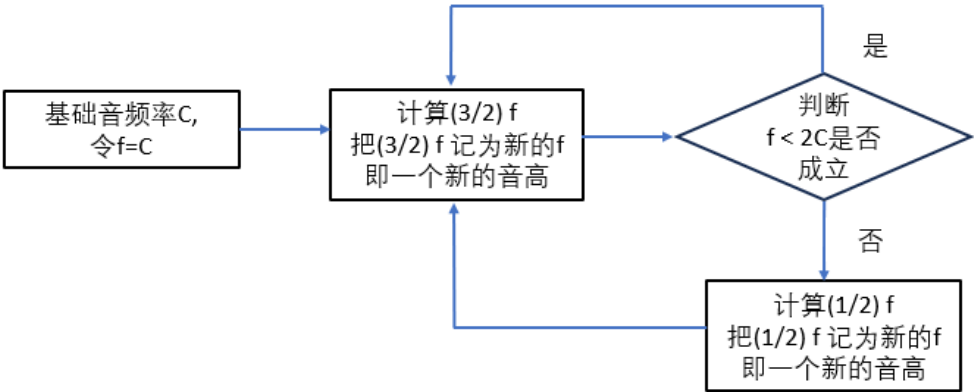
宫音的标准 = $1 \times 3 = 3$, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 = 81$

徵音 = $81/3 \times 4 = 108$ ；商音 = $108 \times 2/3 = 72$ ；羽音 = $72/3 \times 4 = 96$ ；角音 = $96 \times 2/3 = 64$

这里所得的数字是弦长或者管长，根据音高与弦长、管长都成反比例关系，推算五音按照从低到高排列的顺序依次为

弦长	108	96	81	72	64
音	徵	羽	宫	商	角

根据毕达哥拉斯的说法，我画出了如下的逻辑推理导图。



如果再把中国宫商角徵羽中的宫音作为基础音代入上面的推理导图，结果如下

令宫音为 $C=1$,

则 $f=1 \times (3/2) = 3/2$, 其结果 $< 2 \times 1$, 继续计算

$f=(3/2) \times (3/2) = 9/4$, 其结果 $> 2 \times 1$, 需要另外计算

$f=(9/4) \times (1/2) \times (3/2) = 27/16$, 其结果 $< 2 \times 1$, 继续计算

$f=27/16 \times (3/2) = 81/32$

因为频率越高，音高越高，如果把宫商角徵羽代入，各自频率如下，角的音最高。

频率	$3/2 = 1.5$	$27/16 = 1.69$	1	$9/4 = 2.25$	$81/32 = 2.53$
音	徵	羽	宫	商	角

四、 结论

音阶之间有规律可循，并且可以通过数学公式推出不同音阶。各种不同的方法有共通之处，也产生不同的结果。

五、 后续思考

随着社会和科学的发展，方法也不断迭代更新。在宫商角徵羽基础上，古人还加上“变宫”和“变徵”两个音，得出七个音级。据西汉时期的记载，人们还发现了“仲吕上生不及黄钟”的问题。目前还能利用数学模型人工智能自动创作出美妙的音乐。相信人们智慧不断提升，能让数学之美渗透到除音乐以外的不同领域，让生活更加美好。